Master EPP, International Macroeconomics
Annexe 1
Eléments d'optimisation statique

Quelques techniques utiles permettant de résoudre un problème d'optimisation statique sont rappelés dans cette annexe. Pour un exposé plus complet et plus rigoureux, il est conseillé de se reporter, par exemple, à Takayama (1986), Gandolfo (1997) ou Varian (1992, Chapitre 27).

1 Maximum libre et maximum contraint

En économie, de nombreux problèmes d'optimisation se présentent sous la forme :

$$\max_{(C_1,\ldots,C_n)} U(C_1,\ldots C_n) \tag{1}$$

Sous la contrainte :

$$\Phi(C_1,\ldots,C_n) \leq R \tag{2}$$

Dans cette inégalité, U et Φ sont des fonctions deux fois continument différentiables de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$. Le critère U représente, par exemple, l'utilité d'un consommateur et les variables $(C_1,\ldots C_n)$ sont alors ses consommations des divers biens. Selon cette interprétation, le paramètre R désigne le revenu du consommateur et l'inégalité (2) s'identifie à sa contrainte budgétaire.

Dans un premier temps, faisons abstraction de la contrainte (2) et considérons simplement le maximum libre du problème (1). Ses solutions, notées C_i^* pour $i = 1,\ldots n$ vérifient les équations :

$$\frac{\partial U}{\partial C_i} = 0 \quad pour \quad i = 1,\ldots,n \tag{3}$$

Pour que le vecteur $(C_1^*,\ldots,C_n^*)$ soit une solution du problème (1) contraint par la relation (2), il faut que $\Phi(C_1,\ldots,C_n) \leq R$. Si cette inégalité n'est pas vérifiée, il est certain que la contrainte (2) sera saturée à l'optimum du problème (1) et s'écrira donc $\Phi(C_1,\ldots,C_n) = R$. Admettons qu'à partir de cette dernière égalité on puisse exprimer la variable C_1 en fonction du vecteur $(C_2,\ldots,C_n)$ soit $C_1 = \Psi(C_2,\ldots C_n)$. Le problème (1) devient ainsi :

$$\max_{(C_2,\ldots,C_n)} U[\Psi(C_2,\ldots,C_n), C_2,\ldots C_n]$$

Les solutions $(\bar{C}_2,\ldots,\bar{C}_n)$ de ce problème sont alors définies implicitement par les équations :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial C_i}\frac{\partial U}{\partial C_1} + \frac{\partial U}{\partial C_i} = 0 \quad pour \quad i = 2,\ldots,n \tag{4}$$

Avec aussi :

$$\bar{C}_1 \equiv \Psi(\bar{C}_2,\ldots,\bar{C}_n) \Leftrightarrow \Phi\left[\Psi\left(\bar{C}_2,\ldots,\bar{C}_n\right), \bar{C}_2,\ldots,\bar{C}_n\right] \equiv R \tag{5}$$

La dérivation de la seconde égalité apparaissant dans (5) donne $\partial\Psi/\partial C_i = -(\partial\Phi/\partial C_i)/(\partial\Phi/\partial C_1)$, et en reportant cette dernière relation dans (4), on trouve que le vecteur $(\bar{C}_1,\ldots,\bar{C}_n)$ est caractérisé par :

$$\frac{\partial U}{\partial C_i}/\frac{\partial U}{\partial C_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial C_i}/\frac{\partial \Phi}{\partial C_1} \quad \forall i = 1,\ldots,n, \quad avec \quad \Phi(\bar{C}_1,\ldots,\bar{C}_n) = R \tag{6}$$

Les relations (3) et (4) s'appellent les conditions du premier ordre du problème de maximisation (1) sous la contrainte (2). Ce sont des conditions nécessaires pour que le vecteur $(C_1^*,\ldots,C_n^*)$ ou le vecteur $(\bar{C}_1,\ldots,\bar{C}_n)$ soient effectivement un maximum local du problème (1). Elles deviennent suffisantes lorsque les fonctions U et Φ sont concaves.

2 La technique du Lagrangien

Le Lagrangien $\mathcal{L}$ relatif au problème (1) sous la contrainte (2) est défini par :

$$\mathcal{L}(C_1, ..., C_n, \lambda) = U(C_1, ..., C_n) + \lambda[R - \Psi(C_1, ..., C_n)]$$

La variable λ s'appelle le multiplicateur de Lagrange (ou de Kuhn et Tucker) associé à la contrainte (2). Nous allons montrer que l'on retrouve les conditions du premier ordre (3) et (4) en annulant les dérivées partielles du Lagrangien par rapport aux variables C_i, soit $\partial\mathcal{L}/\partial C_i = 0$ pour tout $i = 1, ..., n$ et en tenant compte de la condition dite de complémentarité (ou d'exclusion) :

$$\lambda[R - \Psi(C_1, ..., C_n)] = 0 \quad avec \quad \lambda \geq 0 \tag{7}$$

On a ainsi :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial C_i} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial U}{\partial C_i} = \lambda\frac{\partial\Psi}{\partial C_i}, \quad \forall i = 1, ..., n \tag{8}$$

Si la contrainte budgétaire n'est pas saturée, on a $R > \Psi(C_1, ..., C_n)$ et la relation d'exclusion (7) impose alors $\lambda = 0$. Dans ce cas, l'équation (8) est identique à la condition du premier ordre (3) pour un maximum libre du problème (1). En revanche, si la contrainte (2) est saturée, on a $R = \Psi(C_1, ..., C_n)$ et (8) implique $\partial U/\partial C_1 = \lambda(\partial\Psi/\partial C_1)$. En éliminant le multiplicateur λ entre cette dernière égalité et la relation (8) pour $i \neq 1$, on retrouve les conditions du premier ordre (6) pour un optimum contraint.

3 Interprétation des multiplicateurs de Lagrange

Le multiplicateur λ s'interprète assez simplement en considérant les variations de la valeur optimale du critère $U(C_1, ..., C_n)$ lorsque le paramètre R se modifie. Supposons que la contrainte budgétaire (2) soit saturée, on a alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\Phi}{\partial C_i}\frac{\partial C_i}{\partial R} = 1$$

En utilisant cette dernière égalité et les conditions du premier ordre (8), on obtient :

$$\frac{\partial U}{\partial R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial C_i}\frac{\partial C_i}{\partial R} = \sum_{i=1}^{n} \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial C_i}\frac{\partial C_i}{\partial R} = \lambda$$

Le multiplicateur de Lagrange λ représente donc l'accroissement de l'objectif $U(C_1, ..., C_n)$ lorsque la contrainte (2) est relachée d'une unité. Il mesure en quelque sorte le poids de cette contrainte, c'est pourquoi il est encore appelé prix fictif ou prix implicite (*shadow price*) de la contrainte budgétaire (2). Si cette dernière n'est pas saturée, son prix implicite est alors nul puisque la condition d'exclusion (7) impose $\lambda = 0$.

4 Résumé et guide pratique d'optimisation statique

Si l'on est confronté à un problème de la forme :

$$\max_{(C_1,...,C_n)} U(C_1, ..., C_n) \tag{9}$$

sous les contraintes :

$$\Psi_j(C_1, ..., C_n) \leq R_j, \quad j = 1, ..., m \tag{10}$$

On peut suivre la procédure décrite ci-dessous.

1) On attribue un multiplicateur λ_j à chaque contrainte (10) et on écrit le Lagrangien :

$$\mathcal{L} = U(C_1, ..., C_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [R_j - \Psi_j(C_1, ..., C_n)]$$

2) On annule les dérivées du Lagrangien par rapport aux variables de choix C_i soit :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_i} = \frac{\partial U}{\partial C_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial C_i} = 0, \quad pour i = 1, ..., N$$

3) On écrit les conditions de complémentarité :

$$\lambda_j [R_j - \Psi_k(C_1, ..., C_n)] = 0 \quad avec \quad \lambda_j \geq 0 \quad \forall j = 1, ..., m$$

4) Les conditions du premier ordre du problème s'obtiennent en éliminant les multiplicateurs de Lagrange λ_j des deux relations précédentes.

5) Ces relations sont des conditions nécessaires d'optimalité. La solution doit aussi vérifier les conditions du second ordre pour être un maximum. Les conditions du second ordre sont vérifiées si les fonctions $U(C_1, ..., C_n)$ et $\Psi_j(C_1, ..., C_n)$ sont concaves. Des précisions sur les conditions du second ordre peuvent être trouvées dans l'ouvrage de Takayama (1986)