ECO434, Ecole polytechnique, 2e année
PC 5
Flux de Capitaux Internationaux et Déséquilibres Mondiaux

Exercice 1 : Flux de capitaux internationaux dans le modèle de croissance de Solow

On considère le modèle de croissance de Solow en temps continu.

Le producteur représentatif utilise du capital et du travail pour produire suivant la fonction

$$Y(t) = (K(t))^{\alpha}(A(t)L(t))^{1-\alpha} \tag{1}$$

où $K(0) > 0, A(0) = 1$ sont des paramètres et $A(t) > 0$ croît au taux constant et exogène g. On suppose que le nombre de travailleurs $L(t)$ est constant dans le temps et égal à L et que le bien de consommation a un prix constant normalisé à 1.

Le capital se déprécie au cours du temps au taux δ, de sorte que

$$\dot{K(t)} = I(t) - \delta K(t) \tag{2}$$

où $I(t)$ représente l'investissement. On suppose que les marchés du bien et des facteurs sont concurrentiels.

Le revenu national est égal à

$$R(t) = w(t)L(t) + r(t)K(t) + r^*B(t) \tag{3}$$

avec $w(t)$ et $r(t)$ les rémunérations des facteurs et $B(t)$ la position nette extérieure, égale à zéro en situation d'autarcie. r^* est égal au rendement du capital à l'étranger, *supposé constant pour simplifier*.

On suppose que le consommateur représentatif épargne toujours une part constante $0 < s < 1$ de son revenu de sorte que

$$C(t) = (1 - s)R(t) \tag{4}$$

1. On se place en autarcie financière ($B(t) = 0$).
   (a) Comment l'investissement est-il financé ? Ecrire l'équation d'évolution de $K(t)$ en fonction de $K(t)$ et de variables exogènes. Le stock de capital atteint-il un niveau stationnaire ?
   (b) On note $k(t) = \frac{K(t)}{A(t)L}$ et k^a la valeur d'état stationnaire de $k(t)$. Calculer k^a et décrire l'état stationnaire de cette économie. Comment la production et le stock de capital dépendent-ils des paramètres s et g ?

(c) On admettra qu'à l'optimum du producteur le taux d'intérêt doit vérifier

$$r(t) + \delta = f'(k(t))$$

Montrer que le taux d'intérêt autarcique s'écrit

$$r^a = \frac{\alpha(g+\delta)}{s} - \delta \tag{5}$$

Ecrire k^a comme une fonction de r^a et de paramètres exogènes. Commenter brièvement.

2. On considère maintenant le même modèle pour une *petite économie ouverte*. Cette hypothèse impose $r(t) = r^*$.

   (a) Calculer k, le stock de capital par unité de travail efficient optimal pour le producteur. Pourquoi est-il constant dans le temps et indépendant de s ? Comparer k et k^a en fonction de r^a et r^* et commenter brièvement.

   (b) On note $\tilde{W}(t) = K(t) + B(t)$ la richesse nationale et $\tilde{w}(t) = \frac{\tilde{W}(t)}{A(t)L}$. Calculer la valeur d'état stationnaire $\tilde{w}$ et en déduire la valeur d'état stationnaire b. [Conseil : on peut utiliser le fait que $(r^* + \delta)K(t) = \alpha Y(t)$ et $w(t)L = (1-\alpha)Y(t)$]

   (c) En utilisant (5) montrer que

$$B(t) = \frac{s(r^* - r^a) + \delta\alpha(1-2s)}{(r^* + \delta)(g - sr^*)} Y(t)$$

   Commenter brièvement.

3. En accord avec l'hypothèse de petite économie ouverte, on suppose que le reste du monde est une grande économie autarcique à laquelle le même modèle s'applique, mais avec les paramètres $g^* \neq g$ et $s^* \neq s$. Que prédit le modèle sur le sens des flux financiers internationaux à l'état stationnaire ?

Exercice 2 : Flux de capitaux et démographie

On s'intéresse aux flux de capitaux dans une petite économie ouverte à deux générations : travailleurs (T) et retraités (R). On se place en temps continu. On fait plusieurs hypothèses simplificatrices pour que l'évolution démographique soit capturée par les paramètres $0 < \lambda < 1$ et $0 < \theta < 1$:

- à chaque période, une fraction λ du nombre existant de travailleurs naît, et devient immédiatement travailleur
- à chaque période, une fraction λ des travailleurs prend sa retraite (indépendamment de l'âge)
- à chaque période, une fraction θ des retraités meurt ; aucun travailleur ne meurt
- le ratio de dépendance économique (nombre de retraités par travailleur) initial est égal à $\frac{\lambda}{\theta}$

On suppose aussi pour simplifier que les agents ne consomment qu'à leur dernière période (au moment de mourir) et que le revenu par période (exogène) vaut $Y(t)$, dont une fraction δ représente la taille du secteur financier. On note $r(t)$ le rendement du seul actif financier disponible. Enfin, on suppose que la productivité croît au taux constant g. On note $W^R(t)$ et $W^T(t)$ la richesse financière des retraités et des travailleurs en t, respectivement.

1. Montrer que les hypothèses démographiques impliquent une population et un ratio de dépendance constants. Quel paramètre capture le vieillissement de la population ?
2. On se place initialement en autarcie. Montrer que

$$\begin{aligned} Y(t) &= \theta W^R(t) \\ \dot{W^R}(t) &= (r(t) - \theta)W^R(t) + \lambda W^T(t) \\ \dot{W^T}(t) &= (r(t) - \lambda)W^T(t) + (1 - \delta)Y(t) \end{aligned}$$

3. A l'état stationnaire, la richesse financière de chaque groupe doit croître au taux g. En déduire une équation du second degré déterminant la valeur de $r(t)$ en fonction des paramètres $\{\delta, \lambda, \theta, g\}$ et en déduire le taux d'intérêt autarcique.
4. Quel impact du vieillissement de la population sur le taux d'intérêt autarcique prédit le modèle ? Commenter brièvement. Dans quelle mesure ce résultat peut-il expliquer que certains pays à forte croissance exportent des capitaux à l'ouverture, contrairement à la prédiction du modèle néoclassique ?